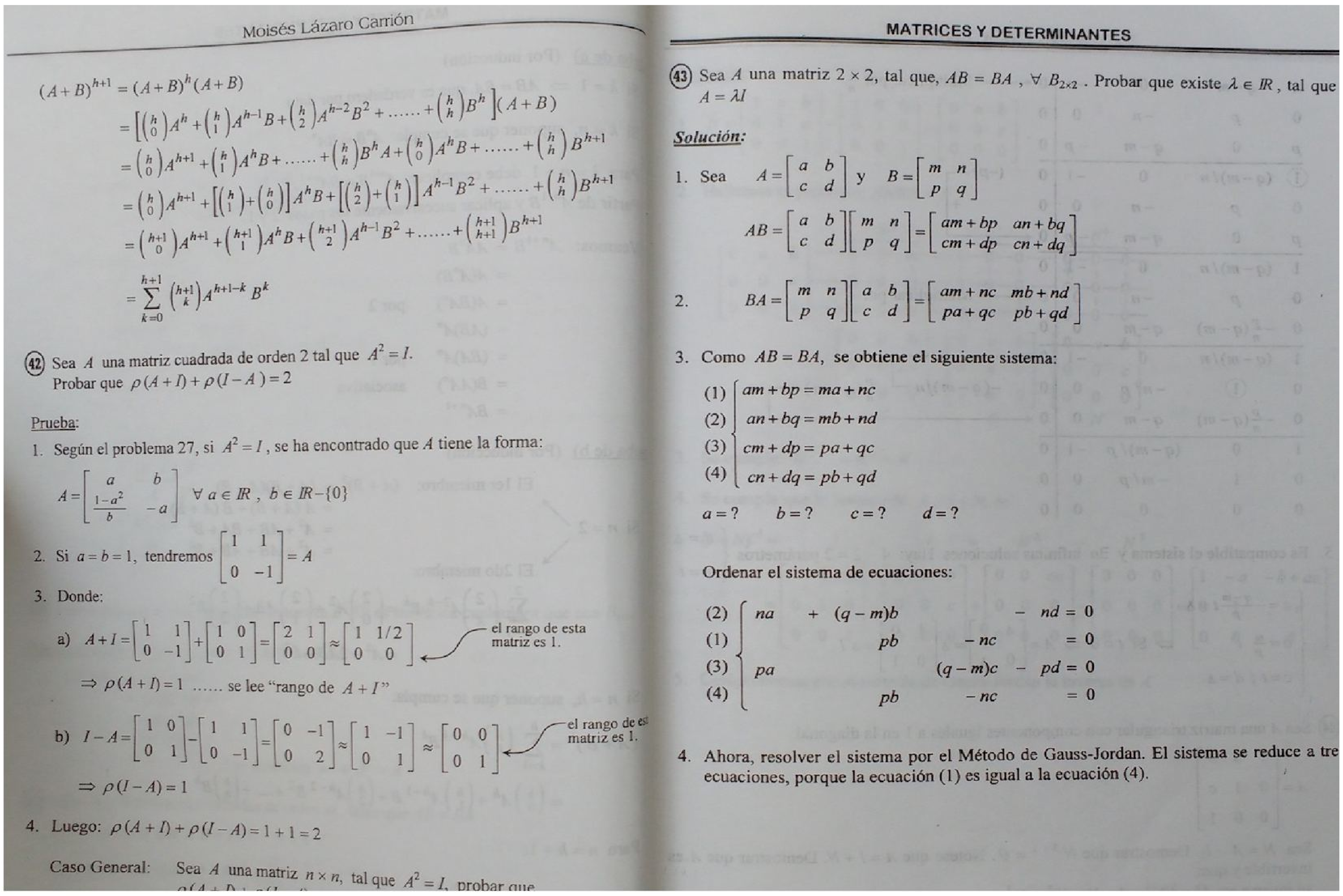

Moisés Lázaro Carrión

$$
\begin{aligned}
(A+B)^{h+1} &= (A+B)^h(A+B)\\
&= \left[\binom{h}{0}A^h+\binom{h}{1}A^{h-1}B+\binom{h}{2}A^{h-2}B^2+\ldots\ldots+\binom{h}{h}B^h\right](A+B)\\
&= \binom{h}{0}A^{h+1}+\binom{h}{1}A^hB+\ldots\ldots+\binom{h}{h}B^hA+\binom{h}{0}A^hB+\ldots\ldots+\binom{h}{h}B^{h+1}\\
&= \binom{h}{0}A^{h+1}+\left[\binom{h}{1}+\binom{h}{0}\right]A^hB+\left[\binom{h}{2}+\binom{h}{1}\right]A^{h-1}B^2+\ldots\ldots+\binom{h}{h}B^{h+1}\\
&= \binom{h+1}{0}A^{h+1}+\binom{h+1}{1}A^hB+\binom{h+1}{2}A^{h-1}B^2+\ldots\ldots+\binom{h+1}{h+1}B^{h+1}\\
&= \sum_{k=0}^{h+1}\binom{h+1}{k}A^{h+1-k}B^k
\end{aligned}
$$

(42) Sea A una matriz cuadrada de orden 2 tal que $A^2=I$.
Probar que $\rho(A+I)+\rho(I-A)=2$

Prueba:

1. Según el problema 27, si $A^2=I$, se ha encontrado que A tiene la forma:

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{bmatrix} \quad \forall\, a\in I\!R\ ,\ b\in I\!R-\{0\}$$

2. Si $a=b=1$, tendremos $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}=A$

3. Donde:

a) $A+I=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1 & 1/2\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ el rango de esta matriz es 1.

$\Rightarrow \rho(A+I)=1$ …… se lee "rango de $A+I$"

b) $I-A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ el rango de esta matriz es 1.

$\Rightarrow \rho(I-A)=1$

4. Luego: $\rho(A+I)+\rho(I-A)=1+1=2$

Caso General: Sea A una matriz $n\times n$, tal que $A^2=I$, probar que

MATRICES Y DETERMINANTES

(43) Sea A una matriz 2×2, tal que, $AB=BA$, $\forall\ B_{2\times 2}$. Probar que existe $\lambda\in I\!R$, tal que $A=\lambda I$

Solución:

1. Sea $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ y $B=\begin{bmatrix}m & n\\ p & q\end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}m & n\\ p & q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}am+bp & an+bq\\ cm+dp & cn+dq\end{bmatrix}$$

2. $$BA=\begin{bmatrix}m & n\\ p & q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}am+nc & mb+nd\\ pa+qc & pb+qd\end{bmatrix}$$

3. Como $AB=BA$, **se obtiene el siguiente sistema:**

$$\begin{array}{l} (1)\\ (2)\\ (3)\\ (4) \end{array}\begin{cases} am+bp=ma+nc\\ an+bq=mb+nd\\ cm+dp=pa+qc\\ cn+dq=pb+qd \end{cases}$$

$a=?\qquad b=?\qquad c=?\qquad d=?$

Ordenar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{l} (2)\\ (1)\\ (3)\\ (4) \end{array}\begin{cases} na+(q-m)b-nd=0\\ pb-nc=0\\ pa+(q-m)c-pd=0\\ pb-nc=0 \end{cases}$$

4. Ahora, resolver el sistema por el Método de Gauss-Jordan. El sistema se reduce a tre ecuaciones, porque la ecuación (1) es igual a la ecuación (4).

Descargar ZanjГin De La Aguada Pdf

Download

8d69782dd3